

Les 8: Vermenigvuldigen met breuken (natuurlijk getal x breuk en omgekeerd)

Voorbereiding op de les

Timing

50 min.

Organisatie / voorbereiding

- Voorzie Bijlage 2: 'Natuurlijk getal x breuk' zodat elk duo hiermee aan de slag kan. Elk duo speelt met 3 sets van 3 kaartjes.
- Voorzie Bijlage 3: 'Werkblad – Vermenigvuldigen met breuken (natuurlijk getal x breuk en omgekeerd)' voor elke leerling.
- Voorzie voor elke leerling 3 rechthoekige kladblaadjes. Dit moeten geen A4 bladen zijn, ze moeten wel makkelijk te vouwen zijn.

Materiaal

- Bijlage 1: PPT: Vermenigvuldigen met breuken (natuurlijk getal x breuk en omgekeerd)
- Bijlage 2: Natuurlijk getal x breuk
- Bijlage 3: Werkblad – Vermenigvuldigen met breuken 1
- Bijlage 3: Werkblad – Vermenigvuldigen met breuken 1_correctiesleutel
- Bijlage 4: Kenniskapstok bewerkingen met breuken – optellen, aftrekken, vermenigvuldigen

Belangrijke rekentaal

- Gelijkwaardige breuk
- Gelijksnamige breuk
- Factoren, maalteken, product, vermenigvuldiger, vermenigvuldigtal

Lesdoelen

1. Vermenigvuldigingen met breuken schematisch voorstellen
2. Een natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk
3. Een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal
4. Vaststellen dat de wisseleigenschap ook kan toegepast worden bij het vermenigvuldigen met breuken
5. De verworven rekenregels schematisch structureren in een overzicht

Minimumdoelen (Juni 2025)

- 2.2.1 De leerling kent het vermenigvuldigen: 'van' als 'maal' bij breuken.
- 2.2.10 De leerlingen kan de eigenschappen van bewerkingen en relaties gebruiken om handig te rekenen.
- 2.2.14 De leerling kent een schematische voorstelling voor de oplossingsstrategie van onderstaande bewerkingen met breuken:
 - natuurlijk getal x breuk;
 - breuk x natuurlijk getal.
- 2.2.15 De leerling kan breuken (noemer tot en met 100) vermenigvuldigen en delen.
- 2.6.2 De leerling kan met natuurlijke getallen tot en met 10 000 (of grotere getallen met eindnullen), decimale getallen (tot op 1 duizendste) en breuken (noemers tot en met 100): (samengestelde) vraagstukken oplossen over:
 - de bewerkingen (+, -, x, :) met (samengestelde vraagstukken):
 - decimale getallen, breuken en procenten.

Situering in de leerlijn

1. Gelijksnamige breuken optellen
2. Gelijksnamige breuken aftrekken
3. Ongelijksnamige breuken optellen
4. Ongelijksnamige breuken aftrekken
5. Verwerkingsles optellen en aftrekken met breuken
6. Herhalingsles optellen met breuken
7. Herhalingsles aftrekken met breuken
8. **Vermenigvuldigen met breuken (natuurlijk getal x breuk en omgekeerd)**
 - a. Een natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk
 - b. Een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal
 - c. De wisseleigenschap bij het vermenigvuldigen met breuken
9. Vermenigvuldigen met breuken (breuk x breuk)
10. Verwerkingsles optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met breuken
11. Delen met breuken (deler is geen breuk)
12. Delen met breuken (deler is een breuk)
13. Verwerkingsles bewerkingen met breuken

Lesverloop

Instap

Lesdoel: 1

Timing: 10 min.

Opwarmer

PowerPoint dia 2.

Denk: Je noteert de breuk $\frac{2}{12}$ op het bord en geeft de leerlingen 1 minuut de tijd om op een kladblad zoveel mogelijk te noteren van wat ze over deze breuk weten.

Vergelijk: Na 1 minuut laat je de leerlingen per twee vergelijken wat ze noteerden. Ze mogen hun nota's aanvullen of verbeteren. Hiervoor krijgen ze 2 minuten.

Deel: Nu duid je één willekeurige leerling aan om te vertellen wat die noteerde. Jij noteert aan het bord en de leerlingen mogen hun notities aanvullen, eventueel in een andere kleur. Indien nodig laat je ook nog andere leerlingen aan het woord om het bordschema aan te vullen.

Indien volgende zaken niet door de leerlingen worden aangebracht, is het belangrijk dat je deze nog uitlegt en op het bord zet:

- Breukstreep: vertelt je dat je in gelijke delen verdeelt.
- Noemer: Zegt je in hoeveel gelijke delen je het geheel verdeelt.
- Teller: Zegt je hoeveel gelijke delen je neemt.
- Geen stambreuk: de teller van de breuk is 2. Stambreuken hebben als teller 1.
- 2 van de 12 gelijke delen of twee twaalfden
- Gelijksnamige breuken: vb. $\frac{3}{12}, \frac{7}{12}$
- Gelijkwaardige breuken: vb. $\frac{2}{12} = \frac{4}{24}$
- Vereenvoudigde breuk: $\frac{1}{6}$

Vermenigvuldiging als herhaalde optelling

Aan de hand van Bijlage 2: 'Natuurlijk getal x breuk' gaan de leerlingen per 2 de juiste kaartjes met elkaar verbinden. De leerlingen krijgen per twee 9 kaartjes uit Bijlage 2 met op de achterkant hetzelfde soort lijnenspel.

Het doel van het spel is om telkens een schematische voorstelling, een herhaalde optelling en een vermenigvuldiging samen te leggen. Als de leerlingen denken dat ze de juiste kaartjes hebben samen gelegd, mogen ze hun kaartjes omdraaien. Als de lijnen mooi op elkaar aansluiten, is de oplossing juist. Zo niet, moeten ze nog eens opnieuw proberen.

Nadat de leerlingen hun kaartjes hebben gelegd wordt er klassikaal besproken waarom die kaartjes nu juist samen horen.

Kern

Lesdoel: 1, 2, 3 en 4

Timing: 30 min.

0. De vermenigvuldiging ontleden

PowerPoint dia 3.

De vermenigvuldiging als de herhaalde optelling wordt nog eens opgefrist aan de hand van het voorbeeld:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$$

- Welke voorstelling zien we? (Een pizza.)
- Wat is het geheel? (De volledige pizza.) Ik teken een cirkel als geheel.
- In hoeveel gelijke delen is het geheel verdeeld? (In 4 gelijke delen.)
Ik verdeel het geheel ook in 4 gelijke delen.
- Hoe groot is elk deel van het geheel dan? (1 van de 4 gelijke delen of $\frac{1}{4}$.)
- Hoeveel keer hebben we één van de 4 gelijke delen? (3 keer.)
- We hebben dus $\frac{1}{4}$, dan nog eens $\frac{1}{4}$ en dan nog eens $\frac{1}{4}$. Welke optelling kunnen we maken? ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$)
- Welk soort breuken tellen we op? (**Gelijknamige breuken** want ze hebben dezelfde naam, dezelfde noemer.)
- Wat is de som? (3 van de 4 gelijke delen of $\frac{3}{4}$.)
- Welke rekenregel zagen we vorige keer? Hoe kan je snel **gelijknamige breuken** optellen? (We tellen de tellers op, de noemer blijft hetzelfde. We vereenvoudigen de som als dat kan.)
- En als je de rekenregel niet weet, hoe kan je dan snel de som vinden? (Je kan een tekening maken.)
- Welke tekening zouden we nog kunnen maken? (Een strookmodel of een rechthoekmodel.)

PowerPoint dia 4.

- Hoe kunnen we deze optelling korter schrijven? (Als een vermenigvuldiging.)
- Welke vermenigvuldiging kunnen we maken? (3 keer $\frac{1}{4}$ of $3 \times \frac{1}{4}$)
- Het is eigenlijk net zoals in het tweede leerjaar bij de tafels:
 - 3 keer 2 = $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$
 - 3 keer $\frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Kennen jullie de naam van de eerste factor, van het getal dat zegt hoeveel keer je iets neemt? (De **vermenigvuldiger**.)
- Hoe noemen we dan de tweede factor, het getal dat zegt hoeveel er in een groepje zit? (Het **vermenigvuldigtal**.)
- De vermenigvuldiger en het vermenigvuldigtal noemen we de **factoren** van onze vermenigvuldiging.
- En hoeveel we dan in totaal hebben, hoe noemen we dat? (Het **product**.)

PowerPoint dia 5.

Vandaag gaan we leren over vermenigvuldigen met breuken.

Als we kijken naar ons overzicht van de bewerkingen met breuken, dan zien we dat we optellen en aftrekken reeds geleerd en herhaald hebben.

Vandaag zoomen we in op het vermenigvuldigen en meer bepaald op het vermenigvuldigen waarbij 1 factor een breuk is. We leren om een natuurlijk getal te vermenigvuldigen met een breuk en omgekeerd.

1. Natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk

Ter info:

- *Bijlage 3 is een werkblad waarop de leerlingen mee kunnen tekenen. De instructies hiervoor staan in de onderwijsleergesprekken hieronder. De structuur staat alvast klaar in het werkblad. Het mee laten tekenen door de leerlingen zal echter meer tijd in beslag nemen (lat nemen, verdelen, inkleuren ...). We raden je aan om de leerlingen zeker 1 voorbeeld mee te laten tekenen. Nadien is het mogelijk om te differentiëren en het tekenen bij sommige leerlingen al los te laten. Een andere optie is om het werkblad in te zetten voor die leerlingen die nood hebben aan verlengde instructie.*
- *Aangezien de leerlingen het schematiseren van de bewerkingen reeds leerden in de voorgaande jaren, moet het concept duidelijk zijn. Moedig de leerlingen aan om de schematische voorstelling te schetsen en niet meer nauwkeurig te tekenen. Deze schets is immers een hulpmiddel om het denken te ondersteunen, geen oefening op het verdelen in gelijke delen.*

WE DOEN HET SAMEN

PowerPoint dia 6.

De leerlingen nemen het werkblad van Bijlage 3: 'Vermenigvuldigen met breuken 1'.

Aangezien het gaat om een product dat groter is dan het geheel, is het belangrijk deze oefening klassikaal op te lossen. Op deze manier zien de leerlingen in hoe ze tot deze oplossing komen.

$$4 \times \frac{2}{7} =$$

- Hoe lees je de vermenigvuldiging? (Ik moet 4 keer $\frac{2}{7}$ nemen).
- Ik ga dit tekenen en kies daarvoor het strookmodel. Wat is het geheel? (De strook.)
- Ik begin met het tekenen van $\frac{2}{7}$. Ik verdeel de strook in 7 gelijke delen (de noemer) en kleur 2 gelijke delen (teller).
- Ik moet nu 4 keer die breuk $\frac{2}{7}$ nemen. Ik kleur dus 4 keer $\frac{2}{7}$ in de strook, elk $\frac{2}{7}$ -deel in een andere kleur. Zo zie ik goed dat ik dit deel 4 keer heb.
- Oei. De 4^e keer $\frac{2}{7}$ kan ik niet meer kleuren. Er zijn geen 2 van de 7 gelijke delen meer over. Hoe kan ik dit oplossen? (Door er een tweede strook bij te halen, een nieuw geheel te tekenen.) Ik verdeel ook dit geheel in 7 gelijke delen.
- Nu kan ik ook de laatste 2 delen van de 7 gelijke delen inkleuren. Eén zevende in de bovenste strook en één zevende in het nieuwe geheel. Aan de kleuren zie ik dat ik inderdaad 4 keer $\frac{2}{7}$ heb gekleurd.
- Wat is het product van $4 \times \frac{2}{7}$? (Het product is dus 1 geheel en dan nog $\frac{1}{7}$ van een ander geheel.)
- Ik wil dit **product** als een breuk schrijven. In hoeveel gelijke delen is een geheel verdeeld? (In 7 gelijke delen, dat is dus de noemer van het **product**.)
- Hoeveel van de gelijke delen heb ik gekleurd? (8 gelijke delen, dus de teller van het **product** is 8.)
- Wat is het **product**? (8 van de 7 gelijke delen of $\frac{8}{7}$.)
- Hoe noemen we een breuk waarvan de teller groter is dan de noemer? (Een onechte breuk.)
- Waarom is de teller groter dan de noemer? (De breuk is groter dan 1 geheel.)
- Kijk naar de herhaalde optelling ($\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$). Als je die uitrekent, wat is de som dan? ($\frac{8}{7}$). Ik tel de tellers op, de noemers blijven gelijk.) Oef! Ik kom hetzelfde totaal uit.

REKENREGEL AFLEIDEN

PowerPoint dia 7.

Je laat een leerling verwoorden hoe we de vermenigvuldiging $4 \times \frac{2}{7}$ hebben opgelost.

Let erop dat de leerling daarbij de juiste vaktaal gebruikt zoals hierboven beschreven.

- Als we nu kijken naar de 2 vermenigvuldigingen die we hebben opgelost, wat kunnen we dan besluiten? Kijk naar de tellers en de noemers. (Als we een natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk, dan vermenigvuldigen we het natuurlijk getal met de teller. De noemer blijft gelijk.)
- Als we vooraf al een breuk kunnen vereenvoudigen, dan doen we dat. Zo maken we de oefening gemakkelijker. Ook het product vereenvoudigen we nog als het kan.
- We controleren of deze rekenregel met alle vermenigvuldigingen werkt door nog een extra oefening te maken.
- Hoeveel is $3 \times \frac{2}{9}$ volgens de rekenregel? (We vermenigvuldigen 3 met de teller, de noemer blijft gelijk. Zo krijgen we $\frac{6}{9}$ of vereenvoudigd $\frac{2}{3}$.)

We gaan controleren met een tekening of dit klopt:

- Ik kies een strook als geheel. Ik verdeel het geheel in 9 gelijke delen (noemer) en kleur er 2 (teller). Dit deel ($\frac{2}{9}$) ga ik nu 3 keer nemen. Dat wil zeggen dat ik in totaal 3×2 of 6 gelijke delen zal kleuren. Het product van onze vermenigvuldiging is dan $\frac{6}{9}$ of vereenvoudigd $\frac{2}{3}$.
- De rekenregel klopt!
- Waaraan doet het lampje op het bord ons denken? (Als ik de rekenregel zou vergeten, dan kan ik ook altijd een schets maken om het juiste antwoord te vinden.)

2. Een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal

WE DOEN HET SAMEN

PowerPoint dia 8.

De leerkracht toont op het bord: $\frac{1}{4} \times 8 = ?$

- Oei. Hoe moet je dat nu lezen? Niet als “keer” want het is niet zoveel keer.
- Wanneer de eerste **factor**, de **vermenigvuldiger**, een breuk is, lees je het **maalteken** niet als ‘keer’ maar als ‘van’. Deze opgave kun je dus lezen als $\frac{1}{4}$ van 8. Dan is het niet moeilijk meer, dat kunnen jullie al!
- Ik neem $\frac{1}{4}$ of een kwart van 8. Eerst heb ik dus 8. Ik kies bijvoorbeeld 8 lekkere taartjes. Die teken ik.
- Ik moet nu $\frac{1}{4}$ van de 8 taartjes nemen. In hoeveel gelijke delen moet ik verdelen? (In 4 gelijke delen, dat geeft de noemer aan.) Ik verdeel de 8 taartjes in 4 gelijke delen.
- Hoe groot is dan één deel? ($8 : 4 = 2$, één deel is 2 taartjes.)
- Hoeveel delen moet ik nemen? (1, dat geeft de teller aan.)
- Maakt het uit welk deel ik neem? (Nee, het zijn gelijke delen.)
- Hoeveel is dan $\frac{1}{4}$ van 8? (2)
- Wanneer je dus een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal, dan lees je het maalteken als ‘van’. En dan is het zoals bij de lessen getallenkennis!

PowerPoint dia 9.

Op het bord staat $\frac{1}{4} \times 3$.

De leerkracht lost deze oefening samen met de leerlingen op. Hier is het gegeven aantal niet deelbaar door de noemer van de breuk. De leerlingen tekenen mee op hun werkblad van bijlage 3.

- Hoe lees je deze vermenigvuldiging? (De eerste factor is een breuk, dus lees ik het **maalteken** als 'van'. Ik neem $\frac{1}{4}$ van 3.)
- Kun je makkelijk 3 in 4 gelijke delen verdelen? (Neen, ik moet nog verder verdelen.)
- Ik heb 3 gehelen, ik teken 3 stroken.
- Die 3 gehelen moet ik elk in 4 gelijke delen verdelen en er telkens 1 deel van nemen. Dat ga ik even tekenen.
Ik verdeel elk geheel in 4 gelijke delen (want de noemer is 4) en neem dan telkens één deel (want 1 is de teller). Dat deel duid ik aan met een kleurtje.
- Hoeveel is dan $\frac{1}{4}$ van 3? Dat kan ik nog niet zo goed zien. Ik leg de gekleurde delen bij elkaar, zo is het duidelijker. Nu kan ik het **product** aflezen.
- Wat is één geheel? (1 strook.) Wijs naar de strook onderaan.
- In hoeveel gelijke delen is het geheel verdeeld? (In 4 gelijke delen, dus de noemer in ons **product** is 4.)
- Hoeveel gelijke delen neem je? (3 van de 4 gelijke delen, dus de teller van ons **product** is 3. Het **product** is dus 3 van de 4 gelijke delen of $\frac{3}{4}$.)

REKENREGEL AFLEIDEN

PowerPoint dia 10.

Amai, best wel ingewikkeld. Kan dat niet eenvoudiger? Als we vermenigvuldigen met natuurlijke getallen (vb. 3×2) dan weten we dat we de **factoren** van plaats mogen wisselen, het **product** blijft hetzelfde.

Want $3 \times 2 = 6 = 2 \times 3$. Dit noemen we de **wisseleigenschap**.

- Mogen we dit met breuken ook doen? Dat onderzoeken we eens! Bij het begin van de les hadden we nagedacht over $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Nu dachten we na over $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$.
Het **product** is hetzelfde! Dus ook als we vermenigvuldigen met breuken mogen we de **factoren** van plaats wisselen! Handig he!

Je kan deze eigenschap nog eens testen met een ander voorbeeld indien nodig of de sterke leerlingen een voorbeeld laten uitwerken op de twee manieren.

- Kijk eens naar de kleuren in de bewerking (zie PPT). Wat is er met de teller van de breuk gebeurd? (Die hebben we vermenigvuldigd met het natuurlijk getal.)
En wat is er met de noemer gebeurd? (Die is hetzelfde gebleven.)
Zo, dan hebben we ons rekenregel gevonden om een natuurlijk getal met een breuk te vermenigvuldigen:
 - 1) Als het kan, vereenvoudig in eerst de breuk.
 - 2) We vermenigvuldigen het natuurlijk getal met de teller.
 - 3) De noemer blijft hetzelfde.
 - 4) We vereenvoudigen het product als het kan.

Afsluiter

Lesdoel: 5

Timing: 10 min.

- Wat hebben we vandaag gedaan? (We hebben vermenigvuldigd met breuken.)
- Welke types vermenigvuldigingen hebben we gezien? (Een natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk en een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal.)

JE DOET HET ZELF

PowerPoint dia 11 - 12.

- Wat is het belangrijkste dat je daarvan moet onthouden?
(Bij het vermenigvuldigen met breuken mag ik de factoren van plaats wisselen.
Ik kan mijn bewerking dus steeds schrijven als een natuurlijk getal maal een breuk.
Dan vermenigvuldig ik dit getal met de teller, de noemer blijft hetzelfde. Indien mogelijk vereenvoudigen we ons product.)

PowerPoint dia 13.

De leerlingen maken op hun werkblad oefening 3.

Ze kruisen de oefeningen aan waarbij de wisseleigenschap het oplossen van de vermenigvuldiging makkelijker maakt.

Enkel deze oefeningen gaan ze nadien ook oplossen.

PowerPoint dia 14.

We leerden tot hiertoe al optellen en aftrekken met breuken. Vandaag leerden we ook nog een natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk en een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal.

- Als we naar onze kenniskapstok kijken, wat gaan we dan volgende les leren? (Volgende les gaan we een breuk vermenigvuldigen met een breuk.)
- Wat komt er nadien nog aan bod om onze kenniskapstok te vervolledigen? (Delen met breuken.)

Toevoegingen aan het lesverloop

Bouwstenen

- Activeer relevante voorkennis
- Geef duidelijke, gestructureerde en uitdagende instructie
- Gebruik voorbeelden
- Combineer woord en beeld
- Laat leerstof actief verwerken
- Zorg voor afwisseling in de oefentypes
- Leer je leerlingen effectief leren

Observatie

- Tijdens het maken van de oefeningen is het belangrijk om goed te observeren op welk niveau de leerlingen hiermee aan de slag gaan. Hebben ze de inhoud begrepen, kunnen ze zelfstandig werken, hebben ze nog nood aan schema's en/of tussenstappen? Op basis van deze observatie kan je de leerlingen bij de verwerkingsles (Les 10) onderverdelen in verschillende niveaus voor het zelfstandig werken.

Differentiatie

Bij het individueel werken aan het werkblad (oefening 3):

- Indien gewenst kan er ook gebruik gemaakt worden van een mini-klas om de oefeningen samen te behandelen en vooral de focus te leggen op het inzichtelijk schematiseren.
- Leerlingen die willen kunnen gebruik maken van het bordschema of de spiekaart om op terug te vallen.
- Sterke leerlingen kunnen na zelfcontrole andere leerlingen helpen indien zij vragen hebben of de niet-aangekruiste oefeningen maken.

Bronnen

- Bronselaer, M. B., De Gendt, J. D. G., De Maesschalck, K., Smits, F. S., Van Den Bulcke, S. V. d. B., Verstocken, T. V., & Vranckx, S. V. (2021). *Wiskunde = Wijs: Inhoud en didactiek voor de lagere school*. (3de editie). Owl Press.
- GO! Pro. (z.d.). Wiskunde - LO. In *GO! Pro Kennisplatform Voor De GO! Professional*. Geraadpleegd op 16 februari 2024, van <https://pro.g-o.be/blog/Documents/Wiskunde%20-%20LO.pdf>
- Hawrijk, I., Vermeersch, N., Palmaerts, A., Depaepe, F., & Van Roy, P. (2014). *Breuken, kommagetallen en procenten: Een didactiek voor het basisonderwijs*. Acco.
- *Onderwijsdoelen*. (z.d.-b). <https://onderwijsdoelen.be/>
- OVSG. (z.d.). *LeerLokaal - Wiskunde*. LeerLokaal. Geraadpleegd op 16 februari 2024, van <https://leerlokaal.ovsg.be/>
- *Selectietool | ZILL*. (z.d.). Selectietool. <https://zill-selector.katholiekonderwijs.vlaanderen/#/>
- Surma, T., Vanhoyweghen, K., Sluijsmans, D., Camp, G., Muijs, D., & Kirschner, P. (2019). *Wijze lessen : twaalf bouwstenen voor effectieve didactiek*. Ten Brink Uitgevers. https://research.ou.nl/ws/files/12121456/Wijze_Lessen_digitaal_160919_1.pdf